Einleitung

Der Ausgangspunkt für diese Arbeit ist ein nicht allzu ungewöhnliches Phänomen: das Auftreten von ähnlichen algebraischen Formalismen in völlig verschiedenen Bereichen der Mathematik, in diesem Fall einerseits in der Knotentheorie und andererseits in der Theorie der $\mathbb{Z}_p$-Erweiterungen von Zahlkörpern. Spannend wird die Analogie hier allerdings dadurch, dass sie sich eingliedert in eine Reihe weiterer Entsprechungen, die Objekte aus diesen beiden unterschiedlichen Gebieten miteinander in Verbindung bringen.

Ähnlichkeiten zwischen Objekten aus der Knotentheorie und Objekten aus der Iwasawatheorie sind schon in den 60er Jahren bemerkt worden. Bei der Berechnung bestimmter étaler Kohomologiegruppen von Zahlkörpern stellte B. Mazur ([27]) zum Beispiel fest, dass $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ als dreidimensionales Objekt angesehen werden sollte. Obwohl ein großer Teil der Analogie schon damals entwickelt wurde, findet man erst seit einigen Jahren Veröffentlichungen, die sich explizit mit diesem Thema befassen. Das seit etwa Mitte der 90er Jahre entstandene Gebiet wurde von A. Reznikov auf den Namen „Arithmetische Topologie“ getauft; sein Kernstück besteht aus einem „Wörterbuch“ ([38], [42]), das in verschiedenen Versionen Verbreitung findet und laufend weiter ergänzt wird. Hinter dem Ganzen steckt die Hoffnung, dass es sich nicht nur um zufällige Gemeinsamkeiten zwischen den beiden Bereichen handelt, sondern dass ein tiefer Zusammenhang der Grund für die Ähnlichkeiten ist.

Zunächst möchten wir hier ein paar Punkte zur Motivation beschreiben. Eine Untersuchung der étalen Kohomologiegruppen von $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ und $\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p$ legt nahe, die Einbettung $\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ mit der Einbettung eines Kreises S^1 in die 3-Sphäre S^3 zu vergleichen – also mit genau der Situation, die in der Knotentheorie vorliegt. Das Schema $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$, das man durch Entfernen von (p) erhält, entspricht dann einem Knotenkomplement. Ähnliche Gründe sprechen dafür, dass jeder Zahlkörper K als ein dreidimensionales Objekt angesehen werden kann, das allgemeiner mit einer 3-Mannigfaltigkeit verglichen wird. Die Einbettung $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K/\mathfrak{p} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ eines abgeschlossenen Punktes entspricht in diesem Fall einem Knoten in einer 3-Mannigfaltigkeit.

Nachdem also einige Gemeinsamkeiten zwischen den Objekten der Knotentheorie und der Iwasawatheorie festgestellt werden können, fällt auf, dass sich die Konstruktion einer wichtigen Knoteninvariante, nämlich des Alexanderpolynoms, in der Iwasawatheorie ähnlich durchführen lässt und das Ergebnis im Wesentlichen ein Objekt ist, das dort unter dem Namen „Iwasawa-Zetafunktion“ oder allgemeiner einfach als „charakteristisches Polynom“ bekannt ist. Dieser Zusammenhang wurde ebenfalls schon in den 60er Jahren bemerkt, allerdings zunächst in keiner Veröffentlichung erwähnt.

Das Ziel dieser Arbeit soll sein, die Beziehung zwischen dem Alexanderpolynom und dem entsprechenden Polynom aus der Iwasawatheorie detailliert zu beschreiben und die Grundlagen und die Motivation dafür im Zusammenhang darzustellen. Außerdem werden Methoden zur Berechnung des Alexanderpolynoms und des charakteristischen Polynoms in einer einheitlichen Form beschrieben. Zum Schluss überlegen wir, welches Objekt man in der Iwasawatheorie erhält, wenn man anstelle eines Knotens das Alexanderpolynom einer Verschlingung betrachtet.

Zu den Kapiteln im Einzelnen: In Kapitel 1 wird das Alexanderpolynom eines Knotens vorgestellt, das von James W. Alexander ([1]) bereits im Jahr 1928 eingeführt wurde und das bis zur Entdeckung des Jones-Polynoms im Jahr 1984 als wahrscheinlich wichtigstes Werkzeug zur Unterscheidung von Knoten diente.

Das Alexanderpolynom kann mit Hilfe der universellen abelschen Überlagerung X_∞ des Knotenkomplements X definiert werden, indem man die erste Homologiegruppe von X_∞ als Modul über $\mathbb{Z}[H_1(X)]$ betrachtet. Das Alexanderpolynom ergibt sich dann als Erzeuger des 0. Fitting-Ideals dieses Moduls. Alternativ ist es möglich, eine Beschreibung mit Hilfe von Verschlingungszahlen und Seifert-Flächen zu geben, die eine Präsentationsmatrix für den Modul $H_1(X_\infty)$ liefert. Als Beispiel für die Berechnung des Alexanderpolynoms untersuchen wir das Alexanderpolynom eines Torusknotens.

Das zweite Kapitel beschreibt die Situation in der Iwasawatheorie. Zunächst werden als Grundlagen einige Ergebnisse aus der Klassenkörpertheorie und ein paar Tatsachen über proendliche Gruppen und $\mathbb{Z}_p$-Erweiterungen von Zahlkörpern bereitgestellt. Eine „typische" $\mathbb{Z}_p$-Erweiterung bekommt man, wenn man die Erweiterung $\mathbb{Q}(\mu_{p^\infty})$, also den Körper, der alle Einheitswurzeln ζ_{p^n} mit p-Potenz-Ordnung enthält, über $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ betrachtet. Als einzige Zwischenkörper erhält man die Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$.

Die Methode, mit der in der Iwasawatheorie die Klassengruppen der Zwischenkörper in solchen Erweiterungen untersucht werden, beruht darauf, dass man bestimmte Galoisgruppen als Moduln über einer vollständigen Gruppenalgebra betrachtet. Diese so genannte „Iwasawa-Algebra" ist isomorph zum Potenzreihenring $\mathbb{Z}_p[\![T]\!]$, und die Strukturtheorie für endlich erzeugte $\mathbb{Z}_p[\![T]\!]$-Moduln, die in den folgenden Abschnitten hergeleitet wird, kann dazu verwendet werden, um Aussagen über die verschiedenen auftretenden Galoisgruppen zu beweisen. Als Beispiel ergibt sich mit dieser Methode relativ schnell der berühmte Satz von Iwasawa ([16]) über das Verhalten des p-Anteils der Idealklassengruppen für die Zwischenkörper in einer $\mathbb{Z}_p$-Erweiterung.

Um das Objekt zu definieren, das als Analogon zum Alexanderpolynom angesehen wird, geht man zunächst von einem total reellen Zahlkörper K aus, betrachtet darüber die eindeutige $\mathbb{Z}_p$-Erweiterung, die sich als Teilerweiterung von $K(\mu_{p^\infty})$ ergibt, und darüber wiederum die maximale abelsche außerhalb von allen Stellen über p unverzweigte p-Erweiterung. Diese letzte Gruppe wird ein Modul über der Iwasawa-Algebra, und das Objekt, das wir „Iwasawa-Zetafunktion" nennen, ergibt sich genau wie das Alexanderpolynom aus dem nullten Fitting-Ideal dieses Moduls. Um eine Erklärung für den Namen „Zetafunktion" zu geben, folgt noch ein kurzer Abschnitt über die so genannte Hauptvermutung der Iwasawatheorie – ein Satz, der im Jahr 1990 endgültig bewiesen wurde und der den Zusammenhang herstellt zwischen der Iwasawa-Zetafunktion und den p-adischen Zetafunktionen, die sich durch Interpolation der Dedekind-Zetafunktionen für Zahlkörper ergeben.

Sowohl das Alexanderpolynom eines Knotens als auch die Iwasawa-Zetafunktion des Körpers $\mathbb{Q}$ lassen sich jeweils allein mit Hilfe einer Gruppe G definieren. Im ersten Fall ist diese Gruppe die Fundamentalgruppe des Knotenkomplements und der Alexandermodul ist der Modul $(G')^{ab}$ über dem Ring $\mathbb{Z}[G^{ab}]$. Im zweiten Fall ist G die Galoisgruppe der maximalen außerhalb von p unverzweigten p-Erweiterung von $\mathbb{Q}$, und man betrachtet die Gruppe $(G')^{ab}$ als $\mathbb{Z}_p[\![G^{ab}]\!]$-Modul.

Das dritte Kapitel liefert den wichtigsten Teil der Motivation für die Analogie zwischen Alexanderpolynom und Iwasawa-Zetafunktion. Dafür wird zunächst Grothendiecks Konstruktion einer Fundamentalgruppe für Schemata allgemein beschrieben und dann speziell auf den

Fall eines normalen Schemas und den für uns interessanten Fall $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ angewendet. Als Fundamentalgruppe ergibt sich für $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}\backslash\{(p)\}$, also für dasjenige Schema, das wir als Analogon des Knotenkomplements auffassen, die Galoisgruppe der maximalen außerhalb von p unverzweigten Erweiterung von $\mathbb{Q}$.

Nachdem in den ersten zwei Kapiteln als Vorbereitung die Bereiche Topologie und Iwasawatheorie getrennt behandelt wurden, stellt das vierte Kapitel nun die Verbindung her: Es besteht aus einer Gegenüberstellung der Objekte in der Topologie und in der Zahlentheorie und fasst damit die Ergebnisse aus den ersten beiden Teilen zusammen.

Als Nächstes folgt ein Teil über das Berechnen des Alexanderpolynoms und des entsprechenden Objekts in der Iwasawatheorie. R. Fox entwickelte in den 50er Jahren den später nach ihm benannten Fox-Kalkül ([10], [11]), der es ermöglicht, das Alexanderpolynom mit Hilfe einer vorgegebenen Präsentation der Knotengruppe zu berechnen. Um diese Methode auf die Zahlentheorie übertragen zu können, formulieren wir die Ergebnisse noch einmal mit Hilfe von Gruppenhomologie.

Als Vorbereitung für die Situation im pro-endlichen Fall benötigt man zunächst einige Grundlagen über vollständige Tensorprodukte und Differentialmoduln über vollständigen Gruppenringen. Damit lässt sich der Formalismus – wie auch schon in [34] in einer etwas anderen Formulierung beschrieben – problemlos übertragen.

H. Koch führt in seinem Buch [21] mehrere Beispiele für Galoisgruppen an, deren Präsentationen als Pro-p-Gruppen bekannt sind. Die Situation entspricht aus verschiedenen Gründen allerdings nicht mehr einem Knoten in S^3, sondern einem allgemeineren Fall, der als Entsprechung einer Verschlingung mit mehreren Komponenten betrachtet werden kann.

Wir diskutieren also als Letztes die Möglichkeiten für eine Verallgemeinerung der Analogie auf Alexanderpolynome für Verschlingungen mit mehreren Komponenten. Die offensichtlichste Verallgemeinerung besteht darin, statt eines Punktes mehrere abgeschlossene Punkte aus $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ zu entfernen. Bessere Analogien erhält man aber, wenn man stattdessen zu größeren Zahlkörpern übergeht und mehrfache $\mathbb{Z}_p$-Erweiterungen untersucht. Die Situation entspricht dann zunächst nicht mehr der einer Verschlingung in S^3, sondern allgemeiner einer Verschlingung in einer 3-Mannigfaltigkeit. Im Spezialfall eines imaginär-quadratischen Zahlkörpers der Klassenzahl 1 erhält man allerdings aus verschiedenen Gründen ein Objekt, das als genaues Analogon einer Verschlingung mit zwei Komponenten in der 3-Sphäre angesehen werden kann.

Zum Abschluss des Kapitels wird das „Wörterbuch“ aus dem vierten Kapitel um die Ergebnisse aus diesem Teil ergänzt, die noch einmal in Form einer Gegenüberstellung aufgelistet werden.