1 Knoten

Ein Knoten ist eine geschlossene Kurve, die in die 3-Sphäre S^3 eingebettet ist. Eine Verschlingung mit n Komponenten besteht aus n disjunkten Einbettungen solcher Kurven.

Da die Einbettungen nicht surjektiv sind, können wir uns vorstellen, dass unsere Knoten statt in S^3 in den dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ eingebettet werden. Meistens werden die Knoten und Verschlingungen zusätzlich mit einer Orientierung versehen, auf jeder Komponente wird also eine Richtung vorgegeben.

Um mit den Knoten und Verschlingungen leichter umgehen zu können, werden wir immer annehmen, dass sie sich aus endlich vielen geraden Liniensegmenten zusammensetzen, wir betrachten also keine „wilden" Knoten. Man stellt sich die Objekte natürlich trotzdem etwa so vor, wie Abbildung 2 andeutet – etwa mit der Begründung, dass die Liniensegmente so winzig sind, dass man sie mit bloßem Auge nicht mehr erkennen kann.

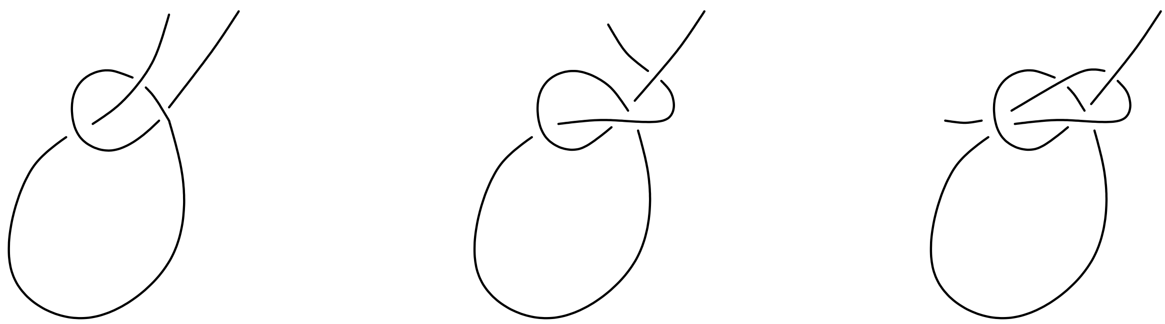


Abbildung 1: Palstek

Mit der oben angegebenen Definition wird zum Beispiel ein Palstek[1] zu einem Knoten, indem man die Enden des Seils zusammenklebt und das Seil als stückweise lineare eindimensionale Kurve betrachtet. Er lässt sich in einer Knotentabelle unter der Bezeichnung 6_2 wiederfinden.

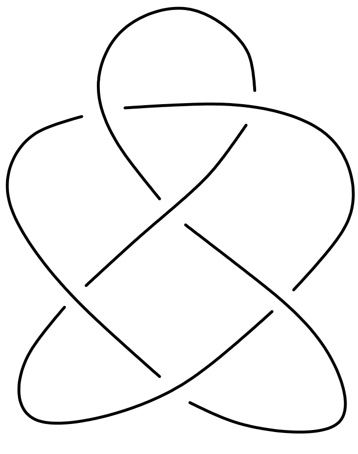


Abbildung 2: Projektion des Knotens 6_2

[1] „Krokodil kommt aus dem Teich, kriecht einmal um den Baum und taucht wieder in den Teich ein"

Die passende Äquivalenzrelation für unsere stückweise linearen Knoten und Verschlingungen ist die folgende:

Definition. Zwei Verschlingungen L_1 und L_2 sind isotop, wenn es einen orientierungserhaltenden stückweise linearen Homöomorphismus $\varphi : S^3 \to S^3$ gibt, der L_1 auf L_2 abbildet.

Bemerkung. Eine Möglichkeit, die Bedingung „stückweise linear" für die 3-Sphäre zu interpretieren, erhält man, wenn man S^3 als Rand des (n+1)-dimensionalen Standardsimplex Δ^{n+1} auffasst. „Stückweise linear" bedeutet dann, dass es zwei Unterteilungen von $\partial\Delta^{n+1}$ in kleinere Simplices gibt, auf denen die Abbildung φ linear ist.

Zu jedem Knoten können wir ein zweidimensionales Bild zeichnen, das es uns erlaubt, den Knoten (natürlich bis auf Isotopie) daraus wiederzugewinnen, wenn wir uns an jeder Kreuzung die zusätzliche Information merken, welche Linie die überkreuzende und welche die unterkreuzende sein soll. Eine solche Projektion, die außerdem die Eigenschaft hat, dass sich niemals drei Linien in einem Punkt schneiden und dass es nur endlich viele Kreuzungen gibt, nennt man Knotendiagramm. Zu einem stückweise linearen Knoten lässt sich ein solches Bild leicht finden. Ein Beispiel ist in Abbildung 2 angegeben.

1.1 Alexandermoduln

Die wichtigste Aufgabe, die sich die Knotentheorie stellt, ist die Klassifikation von Knoten bis auf Isotopie. Beim Unterscheiden von Knoten helfen so genannte Knoteninvarianten, also Objekte wie Zahlen oder Gruppen, die man Isotopieklassen von Knoten oder Verschlingungen zuordnen kann. Die Definitionen der Invarianten, die in den nächsten Abschnitten vorgestellt werden, kann man in fast allen einführenden Büchern über Knotentheorie nachlesen, zum Beispiel in [6] oder [24].

Offensichtlich ungeeignet ist als Knoteninvariante die erste Homologiegruppe des Knotenkomplements, wie der nächste Satz zeigt. Wenn nichts anderes angegeben wird, sind im Folgenden alle Homologiegruppen singuläre Homologiegruppen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$.

Satz 1.1. *Für einen beliebigen Knoten K gilt $H_1(S^3 \backslash K) \cong \mathbb{Z}$.*

Beweis. Sei V eine Torus-Umgebung des Knotens K in S^3. Dann gilt

$$\begin{aligned} H_1(S^3\backslash K) &\cong H_1(S^3\backslash V^\circ) \\ &\cong H_2(S^3, S^3\backslash V^\circ) && \text{(lange exakte Sequenz für } (S^3, S^3\backslash V)) \\ &\cong H_2(V, \partial V) && \text{(Ausschneidung)} \\ &\cong H^1(V) && \text{(Poincaré-Dualität)} \\ &\cong H^1(K) \cong H^1(S^1) \cong \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

□

Sei K ein Knoten und $C = S^3\backslash K$ das Knotenkomplement. Die Fundamentalgruppe G von C nennt man Knotengruppe. Isotope Knoten haben homöomorphe Knotenkomplemente und damit auch isomorphe Knotengruppen. Wir stellen also sofort fest, dass wir schon zwei Knoteninvarianten gefunden haben, die sich im Gegensatz zur ersten Homologiegruppe als brauchbare Hilfsmittel erweisen. Mit ihrer Hilfe lassen sich weitere Knoteninvarianten konstruieren.

Definition. Die universelle abelsche Überlagerung eines wegzusammenhängenden, lokal wegzusammenhängenden, semilokal einfach zusammenhängenden topologischen Raums ist die maximale Überlagerung mit abelscher Decktransformationsgruppe.

Die universelle abelsche Überlagerung von C ist also die eindeutig bestimmte Überlagerung mit Fundamentalgruppe $G' = [G, G]$ und Decktransformationsgruppe $D = G/G'$.

Nach Satz 1.1 gilt $D = H_1(C) \cong \mathbb{Z}$, und wir erhalten folgendermaßen eine Operation dieser Gruppe auf $G'/[G', G']$: Als Gruppe der Deckbewegungen operiert D transitiv auf der universellen abelschen Überlagerung C_∞ von C mit Fundamentalgruppe $\pi_1(C_\infty) = G'$. Diese Operation induziert eine Operation von D auf $H_*(C_\infty)$, die die Homologiegruppen der Überlagerung C_∞ zu $\mathbb{Z}[D]$-Moduln macht. Insbesondere operiert D auf der ersten Homologiegruppe, die zu $G'/[G', G']$ kanonisch isomorph ist.

Lemma 1.2. *Die Operation der Gruppe der Deckbewegungen auf $H_1(C_\infty)$ stimmt mit der Operation von $G/[G, G]$ auf $G'/[G', G']$ durch innere Automorphismen überein.*

Beweis. Sei $g \in G$ ein Repräsentant eines Elements von $H_1(C)$ und $a \in G' = \pi_1(C_\infty)$. Das Element g entspricht einem Automorphismus von C_∞, der folgendermaßen einen Automorphismus der Fundamentalgruppe induziert: Der geschlossene Weg a wird abgebildet auf den geschlossenen Weg, den man erhält, wenn man zunächst die Hochhebung des Weges g, dann den Weg a, beginnend am Endpunkt dieses Weges, und schließlich die Hochhebung des Inversen von g durchläuft. Das entspricht genau der Konjugation mit g. □

Definition. Den $\mathbb{Z}[D]$-Modul $H_1(C_\infty)$ mit der oben angegebenen D-Operation nennt man Alexandermodul von K.

Bemerkung. Der Ring $\mathbb{Z}[D] \cong \mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$ ist offenbar isomorph zum Laurent-Polynomring $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, wobei der Isomorphismus auf zwei verschiedene Arten gewählt werden kann, da ein Erzeuger der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}$ entweder auf t oder auf t^{-1} abgebildet werden kann.

1.2 Fitting-Ideale

Fitting-Ideale sind Invarianten von endlich erzeugten Moduln, mit deren Hilfe wir die Alexanderpolynome definieren werden. In der Literatur werden sie auch als Elementarideale oder Determinantenideale bezeichnet. Einen Abschnitt über Fitting-Ideale gibt es zum Beispiel in [23], XIX §2.

Sei R ein kommutativer Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul.

Definition. Eine endliche Präsentation des R-Moduls M ist eine exakte Sequenz

$$R^m \to R^n \to M \to 0$$

mit $m, n \in \mathbb{N}_0$. Die Matrix, die die Abbildung $R^m \to R^n$ beschreibt, nennt man Präsentationsmatrix des Moduls M.

Wir betrachten im Folgenden nur Moduln über noetherschen Ringen, sodass jeder endlich erzeugte Modul eine endliche Präsentation besitzt. Im allgemeinen Fall kann man auch $m = \infty$ zulassen.

Definition. Das i-te Fitting-Ideal $F_i(M)$ ist das Ideal, das von den $(n-i)$-Minoren einer $(n \times m)$-Präsentationsmatrix von M erzeugt wird. Man setzt $F_i(M) = R$, falls $n - i \leq 0$ und $F_i(M) = 0$, falls $n - i \geq m$.

Falls A eine Präsentationsmatrix für M ist, bezeichnen wir $F_i(M)$ auch als i-tes Fitting-Ideal der Matrix A.

Der folgende Satz zeigt, dass die Fitting-Ideale tatsächlich Invarianten des Moduls sind und die Definition damit sinnvoll ist:

Satz 1.3. *Die Fitting-Ideale eines Moduls hängen nicht von der Wahl der Präsentation ab.*

Beweis. Seien A und B zwei Präsentationsmatrizen von M mit zugehörigen Erzeugendensystemen $\{a_1, \dots, a_n\}$ und $\{b_1, \dots, b_{n'}\}$ von M. Durch Hinzufügen von b_1 zum ersten Erzeugendensystem erhält man ein neues Erzeugendensystem und durch Hinzufügen einer Relation $b_1 = \sum_i r_i a_i$ mit $r_i \in R$ eine neue Präsentationsmatrix

$$\begin{pmatrix} * & 1 \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

von M. Die $(n+1-i)$-Minoren dieser Matrix erzeugen offenbar dasselbe Ideal wie die $(n-i)$-Minoren von A.

Indem wir schrittweise alle Erzeuger b_i hinzufügen und dann mit demselben Argument alle Erzeuger a_i entfernen, können wir also annehmen, dass die zu den Präsentationsmatrizen A und B gehörigen Erzeugendensysteme von M gleich sind.

Da die Zeilen aus Relationen zwischen den Erzeugern bestehen und jede Matrix eine vollständige Menge von Relationen enthält, ist jetzt jede Zeile von B Linearkombination der Zeilen von A. Das Ideal, das von den $n-i$-Minoren von A erzeugt wird, ändert sich durch Hinzufügen der Zeilen aus B also nicht. Umgekehrt gilt dasselbe Argument für B. Die $(n-i)$-Minoren der Matrizen A, $\binom{A}{B}$ und B erzeugen also jeweils dasselbe Ideal. $\square$

Die folgenden zwei Sätze werden in den nächsten Kapiteln nützlich sein:

Satz 1.4. *Sei K ein Körper, R der Polynomring $K[T]$ oder eine Lokalisierung von $K[T]$ und X ein endlich erzeugter Modul vom Rang 0 über R. Die Multiplikation mit T auf dem K-Vektorraum X bezeichnen wir mit φ, ihr charakteristisches Polynom mit p_φ. Dann erzeugt das Element $p_\varphi(T)$ das nullte Fitting-Ideal von X.*

Beweis. Zunächst sei $X = R/(g(T))$ mit einem beliebigen normierten Polynom $g(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_0$ aus $K[T]$. Die Abbildung φ ist als K-lineare Abbildung bezüglich der Basis $\{1, \dots, T^{n-1}\}$ durch die folgende Matrix gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Berechnet man das charakteristische Polynom dieser Abbildung und setzt das Element T ein, so erhält man genau das Polynom $g(T)$.

Für einen beliebigen endlich erzeugten R-Modul X gibt es nach dem Struktursatz für Moduln über Hauptidealringen Polynome $g_i(T) \in K[T]$, sodass $X \cong \bigoplus_{i=1}^k R/(g_i(T))$. Nach Voraussetzung ist keins der Polynome das Nullpolynom. Wir erhalten eine Präsentation

$$R^k \to R^k \to X \to 0,$$

wobei die erste Abbildung durch die Diagonalmatrix beschrieben wird, deren Einträge die Elemente $g_i(T)$ sind. Auch im Fall, dass R eine Lokalisierung des Polynomrings ist, können wir die $g_i(T)$ als Polynome wählen.

Das charakteristische Polynom von φ ist das Produkt der charakteristischen Polynome für die einzelnen Summanden, also gilt $p_\varphi(\lambda) = \prod g_i(\lambda)$, und durch Einsetzen von T ergibt sich die Determinante der Präsentationsmatrix und damit ein Erzeuger des gesuchten Fitting-Ideals. $\square$

Definition. Für einen Modul M über einem noetherschen faktoriellen Ring bezeichnen wir den größten gemeinsamen Teiler der Elemente aus $F_d(M)$ mit $\Delta_d(M)$.

Bemerkung. Falls $F_d(M)$ ein Hauptideal ist, erzeugt $\Delta_d(M)$ dieses Ideal. Da $\Delta_d(M)$ nur bis auf Multiplikation mit Einheiten aus R eindeutig bestimmt ist, können wir es auch als Element von R/R^* auffassen.

Der folgende Satz impliziert insbesondere, dass $F_0(M) = (0)$, falls M positiven Rang hat:

Satz 1.5. *Sei R ein noetherscher faktorieller Ring und*

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

eine exakte Sequenz endlich erzeugter R-Moduln, sodass M'' torsionsfreier Modul vom Rang r ist. Dann gilt $\Delta_d(M) = 0$, falls $d \leq r-1$, und $\Delta_d(M) = \Delta_{d-r}(M')$, falls $d \geq r$.

Beweis. Sei π ein Primelement in R und π^k die höchste π-Potenz, die $\Delta_d(M)$ teilt. Analog sei $\pi^{k'}$ die höchste π-Potenz, die $\Delta_{d-r}(M')$ teilt. Es gilt also $\Delta_d(M) = \pi^k \cdot \alpha$ und $\Delta_{d-r}(M') = \pi^{k'} \cdot \alpha'$ mit zu π teilerfremden Elementen $\alpha, \alpha' \in R$.

Lokalisieren bei dem Primideal (π) liefert eine exakte Sequenz

$$0 \to M' \otimes_R R_{(\pi)} \to M \otimes_R R_{(\pi)} \to M'' \otimes_R R_{(\pi)} \to 0,$$

und wenn A eine Präsentationsmatrix des Moduls M über R ist, können wir A auch als Präsentationsmatrix von $M_{(\pi)} = M \otimes R_{(\pi)}$ über $R_{(\pi)}$ auffassen. Das einzige Primideal der Höhe 1 in diesem Ring ist π, also gilt über der Lokalisierung $\Delta_d(M) = \pi^k$ und $\Delta_{d-r}(M') = \pi^{k'}$ bis auf Einheiten.

Der Ring $R_{(\pi)}$ ist aber ein Hauptidealring, und nach dem Struktursatz für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen haben $M_{(\pi)}$ und $M'_{(\pi)}$ quadratische Präsentationsmatrizen. Da $M''_{(\pi)}$ als torsionsfreier Modul über $R_{(\pi)}$ frei ist, haben wir Präsentationen

$$R^r_{(\pi)} \xrightarrow{0} R^r_{(\pi)} \to M''_{(\pi)} \to 0$$
$$R^k_{(\pi)} \xrightarrow{A} R^k_{(\pi)} \to M'_{(\pi)} \to 0,$$

und für $M_{(\pi)} = M'_{(\pi)} \oplus M''_{(\pi)}$ ergibt sich die Präsentationsmatrix $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Offenbar gilt also über $R_{(\pi)}$ die Gleichung $\Delta_d(M) = \Delta_{d-r}(M')$, mit anderen Worten, die höchste π-Potenz ist über R dieselbe. Da diese Gleichung für jedes beliebige Primelement aus R gilt, ist $\Delta_d(M) = \Delta_{d-r}(M')$ bis auf Multiplikation mit einer Einheit. $\square$

1.3 Definition der Alexanderpolynome

Bisher haben wir uns an Knoteninvarianten das Knotenkomplement, die Knotengruppe und den Alexandermodul notiert. Knotenkomplement und Knotengruppe sind mächtige Invarianten: Seit 1989 ist bekannt, dass das Knotenkomplement für unsere stückweise linearen Knoten eine vollständige Invariante darstellt. Zwei Knoten sind mit anderen Worten genau dann isotop, wenn ihre Knotenkomplemente homöomorph sind. Für so genannte Primknoten, also Knoten, die sich nicht durch Aneinandersetzen von zwei anderen nichttrivialen Knoten ergeben, ist auch die Knotengruppe eine vollständige Invariante ([12]).

Hat man ein Knotendiagramm gegeben, ist es nicht schwierig, für die Knotengruppe eine Präsentation anzugeben. In Kapitel 11 von [24] wird eine Methode beschrieben, wie man durch einen einfachen Algorithmus aus einem Knotendiagramm mit n Segmenten eine Präsentation der Knotengruppe mit n Erzeugern und $n-1$ Relationen generieren kann. Das Resultat ist unter dem Namen Wirtinger-Präsentation bekannt.

Allerdings gelingt es im Allgemeinen nicht so leicht, nur an Hand von Präsentationen der Knotengruppe festzustellen, ob zwei Gruppen isomorph sind. Man sucht aus diesem Grund also weitere Invarianten, die vielleicht nicht alle Knoten unterscheiden können, aber den Vorteil haben, dass man besser mit ihnen umgehen kann.

Definition. Das i-te Alexander-Ideal des Knotens K ist das $(i-1)$-te Fitting-Ideal des $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-Moduls $H_1(C_\infty)$. Das i-te Alexanderpolynom ist ein Erzeuger des kleinsten Hauptideals von $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$, das das i-te Alexander-Ideal enthält. Das erste Alexanderpolynom bezeichnet man auch als *das* Alexanderpolynom.

Das Alexanderpolynom ist also der größte gemeinsame Teiler $\Delta_0(H_1(C_\infty))$ der Elemente aus dem nullten Fitting-Ideal von $H_1(C_\infty)$. In der Literatur wird für das i-te Alexanderpolynom auch Δ_i geschrieben. Um Missverständnisse zu vermeiden, verwenden wir für das erste Alexanderpolynom keinen Index und bezeichnen es einfach mit $\Delta(t)$.

Eindeutigkeit erhält man für die Polynome wieder bis auf Multiplikation mit Einheiten aus $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$, also bis auf Multiplikation mit $\pm t^n$. Im Abschnitt 1.5 über Seifert-Flächen zeigen wir, dass sich das Alexanderpolynom durch Vertauschen von t und t^{-1} nicht ändert und dass der Modul $H_1(C_\infty)$ eine quadratische Präsentationsmatrix besitzt, sodass das erste Alexander-Ideal jedes Knotens ein Hauptideal ist. Außerdem wird mit Hilfe von Seifert-Flächen gezeigt, dass der Alexandermodul den Rang 0 hat und das Alexanderpolynom für keinen Knoten verschwindet.

1.4 Verschlingungszahlen

Die Verschlingungszahl einer Verschlingung mit zwei Komponenten kann man sich so vorstellen, dass sie angibt, wie oft der eine Knoten um den anderen „herumgewickelt" wurde. Durch die Beschreibung von Verschlingungszahlen mit Hilfe von Seifert-Flächen lässt sich diese anschauliche Interpretation besonders gut verstehen.

Sei $L = J \dot\cup K$ eine orientierte Verschlingung mit zwei Komponenten und $C = S^3 \backslash J$ das Knotenkomplement der ersten Komponente. Durch die Orientierung ist ein Erzeuger von $H_1(C) \cong \mathbb{Z}$ vorgegeben, der durch einen Meridian m in C repräsentiert wird.

Definition. Die Homologieklasse, die der Knoten K in $H_1(C)$ repräsentiert, ist ein Vielfaches $\lambda \cdot [m]$ des Erzeugers. Die Zahl λ wird Verschlingungszahl von L genannt. Wir schreiben dafür $\lambda = \mathrm{lk}(J,K)$.

Definition. Eine Seifert-Fläche für einen orientierten Knoten K oder allgemein für eine Verschlingung in S^3 ist eine zusammenhängende kompakte orientierte Fläche, die in S^3 eingebettet ist und den orientierten Knoten K als Rand hat.

Zu jedem Knoten und jeder Verschlingung gibt es eine Seifert-Fläche. Für unsere stückweise linearen Verschlingungen können wir solche Flächen geometrisch mit Hilfe eines Knotendiagramms finden, wie in Abbildung 3 angedeutet.

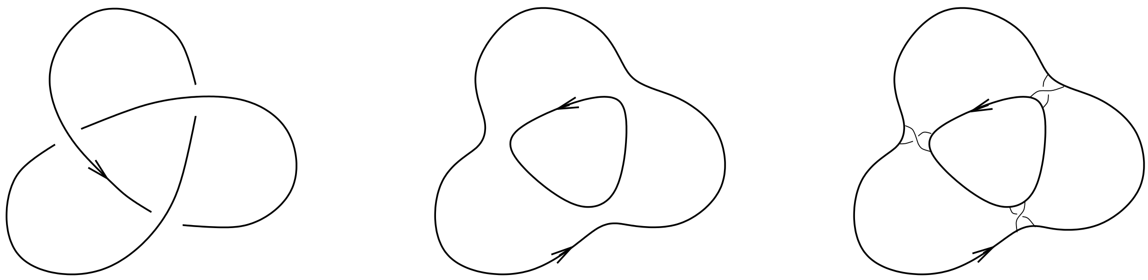


Abbildung 3: Seifert-Fläche

Jede Seifert-Fläche ist homöomorph zu einer Kreisscheibe mit g Paaren von ineinander verschlungenen angeklebten Henkeln. Die Zahl g hängt von der Wahl der Fläche ab und ist keine Invariante des Knotens. In Abbildung 4 kann man zwei verschiedene Seifert-Flächen des trivialen Knotens erkennen.

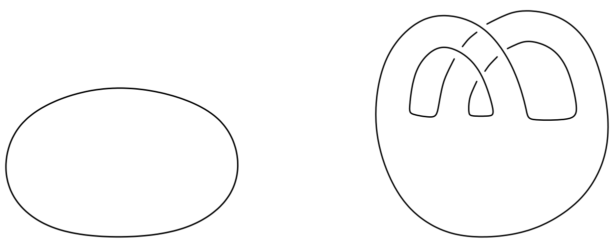


Abbildung 4: Zwei Seifert-Flächen mit verschiedenem Geschlecht

Definition. Das Geschlecht eines Knotens K ist die kleinste Zahl g, für die eine Seifert-Fläche vom Geschlecht g für K existiert.

Für eine Seifert-Fläche F können wir genau wie für einen Knoten eine Umgebung U in S^3 wählen, sodass F eine Deformationsretraktion der Umgebung ist. Wir bezeichnen U als reguläre Umgebung der Seifert-Fläche.

Mit Hilfe einer Seifert-Fläche und des Cup-Produkts auf der Kohomologie lassen sich Verschlingungszahlen ebenfalls beschreiben. Wie im folgenden Diagramm dargestellt, entspricht dem Cup-Produkt auf den Homologiegruppen von C die Schnittform: Für zwei Elemente $a \in H_1(C)$, $b \in H_2(C, \partial C)$ bezeichnen wir mit $a \cdot b \in H_0(C)$ das Element, das man erhält, indem man die Homologiegruppen via Lefschetz-Dualität mit den entsprechenden Kohomologiegruppen identifiziert und das Cup-Produkt bildet.

$$\begin{tikzcd}
H_1(C) & \times & H_2(C,\partial C) \arrow[r, "„\cdot“"] & H_0(C) \\
H^2(C,\partial C) \arrow[u] & \times & H^1(C) \arrow[u] \arrow[r, "„\cup“"] & H^3(C,\partial C) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Wenn $[F] \in H_2(C, \partial C)$ und $[K] \in H^1(C)$ durch eine Fläche und eine Kurve in C gegeben sind, die sich transversal schneiden, wird das Element $[F] \cdot [K] \in H_0(C)$ durch ihren Schnitt repräsentiert. Durch die Orientierung von C sind Isomorphismen $H_0(C) \cong \mathbb{Z}$, $H_3(C, \partial C) \cong \mathbb{Z}$ gegeben.

Lemma 1.6. *Für jede Seifert-Fläche F von J ist die Zahl, die dem Element $[F]\cdot[K]$ in $H_0(C)$ entspricht, genau die Verschlingungszahl von L.*

Beweis. Für eine beliebige Seifert-Fläche F von J und einen Meridian m von J gilt $[F] \cdot [m] = \pm 1$ in $H_0(C)$, da man den Meridian so wählen kann, dass er die Fläche genau einmal schneidet. Mit der passenden Orientierung von F gilt also $[F] \cdot [m] = +1$. Nach Definition der Verschlingungszahl ist $[K] = \mathrm{lk}(J, K) \cdot [m]$, und damit folgt

$$[F] \cdot [K] = \mathrm{lk}(J, K) \cdot [F] \cdot [m] = \mathrm{lk}(J, K).$$

$\square$

Wenn man dieses Lemma und ein Knotendiagramm der Verschlingung L zur Hilfe nimmt, kann man erkennen, wie sich aus solchen Diagrammen die Verschlingungszahl direkt ablesen lässt:

Jedem Punkt des Diagramms, an dem sich die beiden Knoten kreuzen, ordnen wir wie in Abbildung 5 eine der Zahlen $\lambda = +\frac{1}{2}$ oder $\lambda = -\frac{1}{2}$ zu. Die Verschlingungszahl ergibt sich dann

(a) $\lambda = +\frac{1}{2}$ (b) $\lambda = -\frac{1}{2}$

Abbildung 5: Verschlingungszahlen

als die Summe aller dieser Zahlen.

Wenn man diese Definition der Verschlingungszahl zweier Knoten zugrunde legt, sieht man sofort, dass die Verschlingungszahl symmetrisch ist, also dass

$$\mathrm{lk}(J, K) = \mathrm{lk}(K, J)$$

für jede Verschlingung $L = J \,\dot{\cup}\, K$.

1.5 Bestimmen des Alexanderpolynoms mit Hilfe von Seifert-Flächen

Mit Hilfe von Verschlingungszahlen und Seifert-Flächen kann man eine Bilinearform finden, aus deren zugehöriger Matrix eine quadratische Präsentationsmatrix für den $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-Modul $H_1(C_\infty)$ gewonnen werden kann. Das erste Alexander-Ideal ist also ein Hauptideal, und die Determinante der Präsentationsmatrix liefert das Alexanderpolynom. Das Ergebnis kann außerdem dazu verwendet werden zu zeigen, dass das Alexanderpolynom nicht von der Wahl des Isomorphismus $\mathbb{Z}[D] \to \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ abhängt. Mehr Details zu den folgenden Ausführungen stehen in Kapitel 6 von [24].

Satz 1.7. *Sei K ein Knoten und F eine Seifert-Fläche mit minimalem Geschlecht g. Dann sind die Homologiegruppen $H_1(F)$ und $H_1(S^3 \backslash F)$ isomorph und es gibt eine eindeutig bestimmte nicht ausgeartete Bilinearform*

$$\beta : H_1(S^3 \backslash F) \times H_1(F) \to \mathbb{Z},$$

sodass $\beta([c], [d])$ für alle orientierten einfachen geschlossenen Kurven c in $S^3 \backslash F$ und d in F durch die Verschlingungszahl $\mathrm{lk}(c, d)$ gegeben ist.

Beweis. Die Isomorphie ergibt sich aus dem Satz von Mayer-Vietoris. Sei dazu U eine reguläre Umgebung von F in S^3 und V eine offene Deformationsretraktion des Komplements von U, sodass $V \cap U \simeq \partial U$. Man kann sich U als eine Kugel mit $2g$ Henkeln vorstellen, sodass die Homologiegruppe $H_1(\partial U)$ zu $\mathbb{Z}^{4g}$ isomorph ist. Eine Basis bilden die Elemente $f'_1, \ldots, f'_{2g}, e_1, \ldots, e_{2g}$, die man wie in Abbildung 6 wählt:

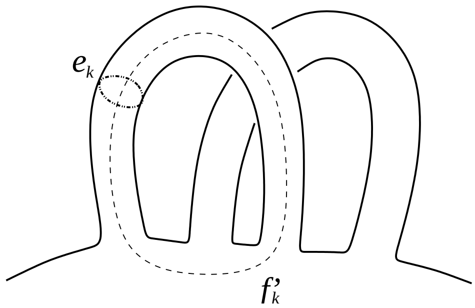


Abbildung 6: Erzeuger von $H_1(\partial U)$

Die Erzeuger f'_i werden unter der Inklusion $\partial U \to U$ auf die $2g$ Erzeuger $f_1, \ldots, f_{2g}$ von $H_1(U)$ abgebildet, und e_i ist jeweils der Rand einer Kreisscheibe, die durch Durchschneiden eines Henkels entsteht. In $H_1(U)$ wird e_i damit auf 0 abgebildet.

Die Mayer-Vietoris-Sequenz liefert wegen $H_1(S^3) = H_2(S^3) = 0$ einen Isomorphismus $H_1(U) \oplus H_1(V) \cong H_1(\partial U)$. Also gilt

$$H_1(F) \oplus H_1(S^3 \backslash F) \cong H_1(\partial U) \cong \mathbb{Z}^{4g},$$

und eine Basis für $H_1(S^3 \backslash F) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ ist durch die Bilder der Erzeuger $e_1, \ldots, e_{2g}$ gegeben.

Wir können eine Bilinearform β auf diesen Basen $\{e_i\}$ und $\{f_j\}$ durch die Gleichungen

$$\beta([e_i], [f_j]) = \delta_{ij}$$

definieren. Wenn man die Orientierung von e_i und f_j passend wählt, erhält man für die Erzeuger genau die Verschlingungszahl $\mathrm{lk}(e_i, f_j)$. Für zwei beliebige orientierte einfache geschlossene

Kurven c in F und d in $S^3 \backslash F$ mit $[c] = \sum \lambda_i [e_i]$ und $[d] = \sum \mu_j [f_j]$ gilt $\beta([c],[d]) = \sum \lambda_i \mu_i$. Die Verschlingungszahl $\mathrm{lk}(c, f_j)$ ist Summe der Verschlingungszahlen der einzelnen Komponenten e_i und f_j, da alle Zahlen, die den Kreuzungspunkten entsprechen, addiert werden. Also gilt $\mathrm{lk}(c, f_j) = \lambda_j$, und analog erhält man die Verschlingungszahl $\sum \lambda_i \mu_i$ für c und d. □

Sei $F \times [-1;1]$ eine reguläre Umgebung der Seifert-Fläche F in S^3. Wir identifizieren die Fläche F mit $F \times \{0\}$ und wählen die Einbettung so, dass ein Meridian des Knotens die Umgebung in Richtung von -1 nach 1 durchläuft.

Seien i^+ und i^- die Einbettungen von F in die Umgebung $F \times [-1;1]$, die durch $i^+(x) = (x, 1)$ bzw. $i^-(x) = (x, -1)$ gegeben sind. Diese Einbettungen induzieren Abbildungen von $H_1(F)$ in $H_1(S^3 \backslash F)$.

Definition. Die zu der Seifert-Fläche F assoziierte Seifert-Form ist die Bilinearform

$$\alpha : H_1(F) \times H_1(F) \to \mathbb{Z},$$

die durch die Gleichung $\alpha(x, y) = \beta(i^-_*(x), y)$ definiert ist.

Bezeichnen wir die Bilder einer orientierten einfachen geschlossenen Kurve c in F unter den Abbildungen i^+, i^- mit c^+ bzw. c^-, so ist nach Definition von β

$$\alpha([c],[d]) = \mathrm{lk}(c^-, d) = \mathrm{lk}(c, d^+).$$

Nach Wahl einer Basis $\{f_1, \ldots, f_{2g}\}$ von $H_1(F)$ können wir die Bilinearform α durch eine Matrix A beschreiben, für die dann gilt

$$A = (a_{ij}) = (\alpha([f_i],[f_j])) = (\mathrm{lk}(f_i^+, f_j)) = (\mathrm{lk}(f_i, f_j^-)).$$

Definition. Eine Matrix, die die Seifert-Form zu einer Seifert-Fläche bezüglich irgendeiner Basis beschreibt, nennen wir Seifert-Matrix.

Lemma 1.8. *Sei C ein Knotenkomplement mit universeller abelscher Überlagerung C_∞. Schneiden wir C entlang einer beliebigen Seifert-Fläche F für den Knoten durch, so erhalten wir einen neuen Raum Y mit zwei Flächen F^+, $F^- \cong F$ als Rand, und die universelle abelsche Überlagerung ergibt sich durch Aneinanderkleben von abzählbar vielen Räumen $Y_i \cong Y$ mit Rändern F_i^+, $F_i^- \cong F$ entlang der Flächen F_i^+ und F_{i+1}^-.*

Beweis. Die erste Homologiegruppe des Knotenkomplements wird vom Meridian des Knotens erzeugt, der für eine beliebige Seifert-Fläche F so gewählt werden kann, dass er F genau einmal schneidet. Der Erzeuger der Deckbewegungsgruppe D kann durch die Hochhebung dieses Meridians repräsentiert werden, die von Y_0 nach Y_1 verläuft und den Durchschnitt von Y_0 und Y_1 damit ebenfalls einmal schneidet. Die Gruppen $H_1(C_\infty)$ und D sind also kanonisch isomorph, damit muss die Überlagerung C_∞ die eindeutig bestimmte Überlagerung mit Deckbewegungsgruppe G^{ab} sein. □

Satz 1.9. *Sei F eine Seifert-Fläche für K und A eine Seifert-Matrix für F bezüglich irgendeiner Basis von $H_1(F)$. Dann ist $tA - A^t$ eine Präsentationsmatrix für den $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-Modul $H_1(C_\infty)$ und das Alexanderpolynom ist damit die Determinante dieser Matrix.*

Beweis. Wir geben hier nur die wesentlichen Schritte wieder; für weitere Details siehe [24], Ch. 6.

Sei $Y_g = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{Z}} Y_{2n}$ und $Y_u = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{Z}} Y_{2n+1}$, sodass $Y_g \cup Y_u = C_\infty$ und $Y_g \cap Y_u = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{Z}} F_n$. Da die kanonischen Abbildungen $C_\infty \to Y$, $Y_g \dot{\cup} Y_u \to Y$ und $Y_g \cap Y_u \to F$ jeweils Überlagerungen mit Decktransformationsgruppe $D \cong \mathbb{Z}$ sind, werden die Homologiegruppen $H_*(C_\infty)$, $H_*(Y_g) \oplus H_*(Y_u) = H_*(Y_g \dot{\cup} Y_u), H_*(Y_g \cap Y_u)$ zu $\mathbb{Z}[D]$-Moduln, und die Mayer-Vietoris-Sequenz liefert eine exakte Sequenz von $\mathbb{Z}[D]$-Moduln

$$H_1(Y_g \cap Y_u) \to H_1(Y_g) \oplus H_1(Y_u) \to H_1(C_\infty) \to H_0(Y_g \cap Y_u) \to H_0(Y_g) \oplus H_0(Y_u).$$

Da die letzte Abbildung injektiv ist, erhalten wir die gesuchte freie Präsentation

$$H_1(Y_g \cap Y_u) \to H_1(Y_g) \oplus H_1(Y_u) \to H_1(C_\infty) \to 0$$

des $\mathbb{Z}[D]$-Moduls $H_1(C_\infty)$ und müssen nur noch nachweisen, dass die angegebene Präsentationsmatrix die richtige ist.

Eine Basis von $H_1(Y_g \cap Y_u) = H_1(F) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ als $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-Modul erhält man aus der vorgegebenen $\mathbb{Z}$-Basis $\{[e_i]\}$ von $H_1(F)$; wir bezeichnen sie ebenfalls mit $\{[e_i]\}$. Aus einer bezüglich der Bilinearform β dualen $\mathbb{Z}$-Basis $\{[f_j]\}$ von $H_1(S^3 \backslash F) \cong H_1(Y)$ erhalten wir ähnlich eine $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-Basis von $H_1(Y_g) \oplus H_1(Y_u) \cong H_1(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

Die Abbildung $H_1(Y_g \cap Y_u) \to H_1(Y_g) \oplus H_1(Y_u)$ ist dann durch $[f_i] \mapsto -[f_i^+] + t \cdot [f_i^-]$ gegeben. Nach Definition von $A = (A_{ij})$ hat $[f_i^+]$ in $H_1(Y)$ die Darstellung $\sum_i A_{ij}[e_i]$ und $[f_i^-]$ hat die Darstellung $\sum_j A_{ij}[e_j]$. Der $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-Modulhomomorphismus $H_1(Y_g \cap Y_u) \to H_1(Y_g) \oplus H_1(Y_u)$ wird bezüglich der angegebenen Basen also durch die Matrix $-A^t + tA$ dargestellt. $\square$

Aus der Darstellung des Alexanderpolynoms als Determinante von $tA - A^t$ kann man ablesen, dass das Polynom bis auf Multiplikation mit Einheiten aus $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ von der Wahl des Isomorphismus $\mathbb{Z}[D] \to \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ unabhängig ist: Setzt man anstelle von t das Element t^{-1} ein, so erhält man wegen $\det A \neq 0$

$$\begin{aligned}
\det(t^{-1}A - A^t) &\sim \det(A(A^t)^{-1} - tE) \\
&= \det((A^{-1}A^t)^t - tE) \\
&= \det(A^{-1}A^t - tE) \\
&\sim \det(A^t - tA) \\
&\sim \det(tA - A^t).
\end{aligned}$$

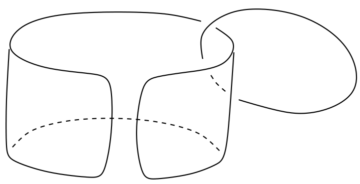
Das Zeichen „$\sim$“ steht hier für Gleichheit bis auf Multiplikation mit einer Einheit aus $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$. Wie angekündigt spielt es also keine Rolle, welcher Erzeuger von $H_1(C)$ auf das Element t abgebildet wird. Als weiteres Resultat ergibt sich aus dieser Darstellung:

Satz 1.10. *Für jeden Knoten gilt* $\Delta(1) = \pm 1$.

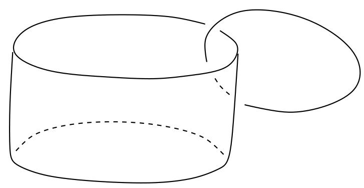
Beweis. Berechnet man die Determinante von $tA - A^t$ für $t = 1$, so ergibt sich für den Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte:

$$\begin{aligned}
a_{ij} - a_{ji} &= \mathrm{lk}(f_i^+, f_j) - \mathrm{lk}(f_j^+, f_i) \\
&= \mathrm{lk}(f_i^+, f_j) - \mathrm{lk}(f_i^-, f_j) \\
&= \mathrm{lk}(f_i^+, f_j) + \mathrm{lk}(-f_i^-, f_j) \\
&= \mathrm{lk}(g_i, f_j)
\end{aligned}$$

wobei g_i einen eingebetteten Kreis in der 3-Sphäre bezeichnet, den man erhält, indem man f_i^- mit umgekehrter Orientierung und f_i^+ so verbindet, dass der resultierende Zykel in $H_1(S^3 \backslash f_j)$ dasselbe Element liefert wie $f_i^+ - f_i^-$. Diese Zahl erhält man nach Lemma 1.6 nach Wahl einer Seifert-Fläche A von g_i mit $[A] \in H_2(S^3, g_i)$ als Schnittzahl $[A] \cdot [f_j]$. Statt A kann man die Seifert-Fläche $A' = f_i \times [-1;1]$ mit $[A'] \in H_2(S^3, f_i^+ \dot\cup f_i^-)$ wählen, die dieselbe Schnittzahl $[A'] \cdot [f_j]$ liefert.



(a) Die Fläche A



(b) Die Fläche A'

Abbildung 7: Seifert-Flächen

Da der Schnitt von A' und F genau die Kurve $f_i \subset F$ ist, gilt $[A'] \cdot [f_j] = \pm[f_i] \cdot [f_j]$. Also ist der Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von $A - A^t$ die Schnittzahl von f_i und f_j. Damit beschreibt die Matrix die Schnittform auf F, und ihre Determinante hat den Betrag 1. Daraus folgt $\Delta(1) = \pm 1 \neq 0$. $\square$

Korollar 1.11. *Der Alexandermodul eines Knotens ist ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-Modul vom Rang 0, und der $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$-Modul $H_1(C_\infty) \otimes \mathbb{Q}$ hat als $\mathbb{Q}$-Vektorraum endliche Dimension.*

Beweis. Da der Alexandermodul eine endliche Präsentationsmatrix besitzt, ist er offenbar endlich erzeugt. Nach Satz 1.5 ist das nullte Fitting-Ideal für Moduln mit positivem Rang das Nullideal, es gilt aber $\Delta(1) = \pm 1$ und damit $F_0(H_1(C_\infty)) \neq 0$.

Nach dem Struktursatz für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen gilt

$$H_1(C_\infty) \otimes \mathbb{Q} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Q}[t, t^{-1}]/(g_i(t))$$

mit passenden Elementen $g_i(t) \in \mathbb{Q}[t, t^{-1}]$. Da wegen $g_i(t) \neq 0$ jeder Summand ein endlichdimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum ist, ist auch $H_1(C_\infty) \otimes \mathbb{Q}$ endlichdimensional. $\square$

1.6 Beispiel: Das Alexanderpolynom eines Torusknotens

Der Torusknoten mit Parametern $a, b \in \mathbb{N}$ ist der Knoten, den man erhält, wenn man einen Bindfaden a-mal in Längsrichtung und b-mal in Richtung des Meridians um einen Torus wickelt. Der Knoten entspricht also der Einbettung

$$\begin{array}{rcl} S^1 & \to & S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^3 \subset S^3, \\ z & \mapsto & (z^a, z^b). \end{array}$$

Wir setzen im Folgenden immer voraus, dass die Parameter a und b teilerfremd sind, damit diese Abbildung wirklich eine Einbettung ist.

Um das Alexanderpolynom eines Torusknotens berechnen zu können, bestimmen wir zunächst eine Präsentation der Knotengruppe ([15], Ex. 1.24) und daraus eine Präsentation des Alexandermoduls.

1.6.1 Die Knotengruppe eines Torusknotens

Satz 1.12. *Die Knotengruppe eines Torusknotens K mit Parametern a und b hat die Präsentation*

$$G = \langle x, y | x^a y^{-b} \rangle.$$

Beweis. Um $\pi_1(S^3 \backslash K)$ zu berechnen, teilen wir die 3-Sphäre auf in den Abschluss des „Inneren" und des „Äußeren" des Torus $S^1 \times S^1$:

$$S^3 = \partial D^4 = \partial(D^2 \times D^2) = \partial D^2 \times D^2 \cup D^2 \times \partial D^2$$

ist die Vereinigung von zwei Volltori, deren Schnitt den Torus ergibt, in den der Knoten K eingebettet ist.

Für diese beiden Teile geben wir dann Deformationsretraktionen in Mengen X_a und X_b an, für deren Vereinigung sich die Fundamentalgruppe mit Hilfe des Satzes von Seifert und van Kampen berechnen lässt.

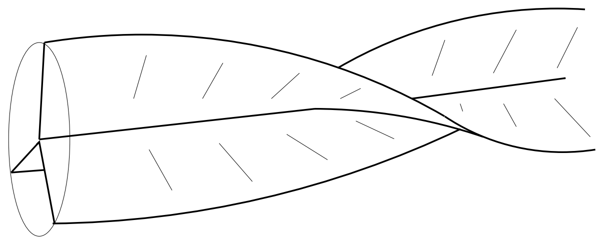


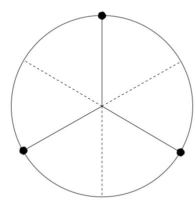
Abbildung 8: Die Menge X_a

Sei $X = S^1 \times I/((z,0) \sim (e^{2\pi i/a} \cdot z, 0), (z,1) \sim (e^{2\pi i/b} \cdot z, 1))$. Wir teilen den Raum X auf in

$$\begin{aligned} X_a &= S^1 \times [0, \frac{1}{2}]/((z,0) \sim (e^{2\pi i/a} \cdot z, 0)) \quad \text{und} \\ X_b &= S^1 \times [\frac{1}{2}, 1]/((z,1) \sim (e^{2\pi i/b} \cdot z, 1)), \end{aligned}$$

also in die beiden Abbildungszylinder der Abbildungen $z \mapsto z^a$ und $z \mapsto z^b$. Der Schnitt von X_a und X_b ist die Menge $S^1 \times \{\frac{1}{2}\}$. Die Menge X_a findet sich im Torus $S^1 \times D^2$ folgendermaßen wieder:

Abbildung 9: Schnitt durch den Torus



Für jeden Punkt $x \in S^1$ schneidet die Menge $\{x\} \times \partial D^2$ den Knoten K in a Punkten, die jeweils in gleichen Abständen zueinander auf dem Kreis S^1 liegen und durch a Radien dieses Kreises, jeweils in der Mitte zwischen zwei benachbarten Punkten, voneinander getrennt werden können. Abbildung 9 zeigt die Menge $\{x\} \times D$: Wenn x variiert, schneiden diese

Radien eine zu X_a homöomorphe Teilmenge von $S^1 \times D^2$ aus. Analog dazu findet man eine zu X_b homöomorphe Teilmenge im zweiten Volltorus. Der Schnitt dieser beiden Teilmengen ist die Menge, die in beiden Fällen durch die Endpunkte der Radien ausgeschnitten wird. In Abbildung 10 ist diese Menge eingezeichnet.

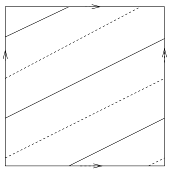


Abbildung 10: Torusoberfläche

Das Komplement von K im ersten Torus kann durch Deformationsretraktion auf die Menge X_a abgebildet werden. Analog bildet man das Komplement von K im zweiten Torus auf die Menge X_b ab. Diese Abbildungen können so gewählt werden, dass sie auf dem Schnitt dieser Komplemente, also auf dem Torus, der den inneren vom äußeren Volltorus trennt, übereinstimmen.

Um nun die Fundamentalgruppe des Raumes X zu berechnen, wenden wir den Satz von Seifert und van Kampen auf die beiden Teile X_a und X_b an, genauer also auf zwei passende offene Umgebungen. Die Mengen X_a, X_b und $X_a \cap X_b$ sind homotopieäquivalent zu Kreisen, haben also jeweils Fundamentalgruppe $\mathbb{Z}$. Ein Repräsentant eines Erzeugers von $\pi_1(X_a \cap X_b)$ ist in X_a homotop zu einer Schleife, die a-mal einen Erzeuger von $\pi_1(X_a)$ repräsentiert und entspricht in X_b analog dem b-fachen eines Erzeugers von $\pi_1(X_b)$. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ ergibt sich als das amalgamierte Produkt

$$\pi_1(X_a) *_{\pi_1(X_a \cap X_b)} \pi_1(X_b)$$

und hat damit die Präsentation

$$\langle x, y | x^a y^{-b} \rangle.$$

$\square$

1.6.2 Berechnen des Alexanderpolynoms

Sei t ein Erzeuger von $G/G' \cong \mathbb{Z}$ und $\varphi : G \to G/G' \cong \langle t \rangle$ die Quotientenabbildung. Die Erzeuger x und y von G werden jeweils auf eine Potenz von t abgebildet, und da ihre Bilder in $\langle t \rangle$ die Gruppe erzeugen, müssen die Exponenten teilerfremd sein. Aus der Relation $\varphi(x)^a \varphi(y)^{-b} = 1$ folgt damit $\varphi(x) = t^b$ und $\varphi(y) = t^a$ bis auf Vertauschen von t und $-t$.

Da das Alexanderpolynom nur von der Fundamentalgruppe des Knotenkomplements abhängt, können wir dieses durch einen CW-Komplex X mit dem Punkt P als einziger 0-Zelle, je einer 1-Zelle für x und y und einer 2-Zelle für die Relation $x^a y^{-b} = 1$ ersetzen und alle Konstruktionen mit diesem Raum durchführen.

Sei $p : X_\infty \to X$ die Überlagerung mit Fundamentalgruppe G'. Als Decktransformationsgruppe operiert $D = \langle t \rangle$ für jeden Punkt $Q \in X$ transitiv auf der Faser $p^{-1}(Q)$. Seien $\tilde{P}$ ein Punkt über P und $\tilde{x}, \tilde{y}$ die Hochhebungen von x und y, die bei $\tilde{P}$ beginnen. Wir können $\tilde{x}, \tilde{y}$ und die Hochhebung von $x^a y^{-b}$ bei $\tilde{P}$ als Elemente von $H_1(X_\infty, X_\infty^{(0)})$ auffassen.

Als $\mathbb{Z}[D]$-Modul wird $H_1(X_\infty, X_\infty^{(0)})$ von $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ erzeugt, da alle 1-Zellen $\mathbb{Z}[D]$-Vielfache von $\tilde{x}$ oder $\tilde{y}$ sind. Alle 2-Zellen sind $\mathbb{Z}[D]$-Vielfache der Hochhebung der einzigen 2-Zelle von X, also genügt für die Beschreibung des $\mathbb{Z}[D]$-Moduls $H_1(X_\infty, X_\infty^{(0)})$ eine einzige Relation r, die der Hochhebung von $x^a y^{-b}$ entspricht. Als $\mathbb{Z}[D]$-Linearkombination der Erzeuger $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ lässt sich diese Relation folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} r &= \widetilde{x^a y^{-b}} \\ &= \tilde{x} + \varphi(x)\tilde{x} + \varphi(x)^2\tilde{x} + \cdots + \varphi(x)^{a-1}\tilde{x} + \varphi(x)^a(-\varphi(y)\tilde{y}^{-1} - \varphi(y)^{-2}\tilde{y} - \cdots - \varphi(y)^{-b}\tilde{y}) \\ &= (1 + t^b + t^{2b} + \cdots + t^{b(a-1)}) \cdot \tilde{x} + t^{ab}(-t^a - t^{2a} - \cdots - t^{ab}) \cdot \tilde{y} \\ &= \frac{t^{ab}-1}{t^b-1} \cdot \tilde{x} - \frac{t^{ab}-1}{t^a-1} \cdot \tilde{y}. \end{aligned}$$

Die exakte Sequenz

$$\mathbb{Z}[D] \to \mathbb{Z}[D]^2 \to H_1(X_\infty, X_\infty^{(0)}) \to 0,$$

in der die erste Abbildung durch die Matrix $A = (\frac{t^{ab}-1}{t^b-1} \; \frac{t^{ab}-1}{t^a-1})^t$ beschrieben wird, ist also eine Präsentation von $H_1(X_\infty, X_\infty^{(0)})$ als $\mathbb{Z}[D]$-Modul.

Aus der langen exakten Sequenz für relative Homologie erhält man

$$0 \to H_1(X_\infty) \to H_1(X_\infty, X_\infty^{(0)}) \xrightarrow{\partial} H_0(X_\infty^{(0)}) \xrightarrow{i_*} H_0(X_\infty) \to 0,$$

wobei $H_0(X_\infty^{(0)}) \cong \mathbb{Z}[D]$, $H_0(X_\infty) \cong \mathbb{Z}$ und $\ker i_* = (t-1)$. Da $\ker i_*$ als Hauptideal ein freier $\mathbb{Z}[D]$-Modul vom Rang 1 ist, erhält man aus der exakten Sequenz

$$0 \to H_1(X_\infty) \to H_1(X_\infty, X_\infty^{(0)}) \to \ker i_* \to 0$$

und Satz 1.5 die Gleichung $\Delta(t) = \Delta_0(H_1(X_\infty)) = \Delta_1(H_1(X_\infty, X_\infty^{(0)}))$.

Das Alexanderpolynom des Torusknotens ergibt sich also als größter gemeinsamer Teiler der beiden Einträge von A. Das Polynom

$$\frac{t^{ab}-1}{t^b-1} \cdot \frac{t-1}{t^a-1} = \frac{t^{ab}-1}{t^a-1} \cdot \frac{t-1}{t^b-1}$$

erhält man aus diesen Einträgen, indem man durch $\frac{t^a-1}{t-1}$ bzw. $\frac{t^b-1}{t-1}$ teilt. Da diese beiden Polynome teilerfremd sind, ist $\frac{t^{ab}-1}{t^a-1} \cdot \frac{t-1}{t^b-1}$ der größte gemeinsame Teiler der Einträge und damit das gesuchte Alexanderpolynom.

Wie diese Beobachtungen zu einer allgemeinen Berechnungsmethode für das Alexanderpolynom ausgearbeitet werden können, wird am Anfang des fünften Kapitels beschrieben.